2007年　東大数学　文系 第3問

下1桁は周期性があるのは有名。
ex). 2^nの下1桁は 2.4.8.6 の周期がある。
2003年 文系第3問 などを参考に。
⇒ 下2桁も周期性があるのでは?

$f(m) = 5m^4$ とおく。

$f(0) = 0$	0	
$f(1) = 5$	5	
$f(2) = 80$	80	
$f(3) = 405$	05	
$f(4) = 1280$	80	
$f(5) = 3125$	25	
$f(6) = 6480$	80	
$f(7) = 12005$	05	
$f(8) = 20480$	80	
$f(9) = 32805$	05	
$f(10) = 50000$	00	
$f(11) = 73205$	05	
$f(12) = 103680$	80	
$f(13) = 142805$	05	
$f(14) = 192080$	80	
$f(15) = 253125$	25	

$$
\begin{aligned}
f(5) &= 5\times 5^4\\
&= 5\times 625\\
&\equiv 5\times 25 \pmod{100}\\
&\equiv 25 \pmod{100}
\end{aligned}
$$
などと合同式を使っても可。

0.5.80.25 の
4種類が登場するっぽい。
ここまででは、
周期は見えない。

どうやら、10の周期に
なってそう。

周期があるか探っているだけなので、
解答用紙に書かなくてもよいが、結局は周期10
(別解なら、周期5)を示すときに、必要になる。
周期10で循環しているのを示したいので、
$f(m+10) \equiv f(m) \pmod{100}$ を示したい。

$$
\begin{aligned}
f(m+10) &= 5(m+10)^4\\
&= 5m^4 + \underbrace{200m^3 + 3000m^2 + 20000m + 50000}_{100\text{の倍数}}\\
&\equiv 5m^4\\
&\equiv f(m) \pmod{100}
\end{aligned}
$$

よって、$f(m+10)$ と $f(m)$ の下2桁は一致する。
つまり周期10で循環する。
$f(0)$ ～ $f(9)$ の下2桁を調べて、 0.5.25.80 //

$\boxed{\text{別解}}$

$f(1)$ ～ $f(9)$ を見ると、$f(5)$ を中心に、対称になっている
ことに気付ける。つまり、

$$
\begin{cases}
f(1) \equiv f(9) \equiv 5\\
f(2) \equiv f(8) \equiv 80\\
f(3) \equiv f(7) \equiv 5\\
f(4) \equiv f(6) \equiv 80
\end{cases}
$$

つまり、$f(m) \equiv f(10-m)$ となりそう

これも、解答用紙に書かなくてもよい。

$$
\begin{aligned}
f(10-m) &= 5(10-m)^4 = 5(m-10)^4\\
&= 5m^4 - 200m^3 + 3000m^2 - 20000m + 50000\\
&\equiv 5m^4\\
&\equiv f(m) \pmod{100}
\end{aligned}
$$

$f(0)$ ～ $f(5)$ を調べて、 0.5.25.80 //